ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιοριστεί το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης:

$xy'+y-(x\ln x)y^2=0$, $y(1)=1$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

2. $x^2y'+2xy-y^3=0$, $(x>0)$

3. $(2xy+x^2y^3)y'=0$, $(x>0)$

4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιοριστεί το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης:

$$xy'+y-xy^3=0 \quad , \quad y(1)=-1$$

ΛΥΣΗ

1. Η δοθείσα είναι εξίσωση Bernoulli με $a=2$. Υποθέτοντας ότι $y\neq 0$ και εκτελώντας το μετασχηματισμό Leibniz

$$u=y^{-1}, \quad (1)$$

έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} ,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$-xu^{-2}u'+u^{-1}-(x\ln x)u^{-2}=0 ,$$

ή

$$u'-\frac{1}{x}u=-\ln x \quad . (2)$$

Η (2) είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx}\left\{C - \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \ln x dx\right\}$$

$$= e^{\ln x}\left(C - \int e^{-\ln x} \ln x dx\right)$$

$$= x\left(C - \int \frac{\ln x}{x} dx\right)$$

$$= x\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) . \quad (3)$$

Ικανοποιώντας την αρχική συνθήκη, θέτουμε στην (3) $x = 1$, $u = y^{-1} = 1$ και παίρνουμε $C = 1$. Έτσι, η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο

$$y = \frac{1}{x\left(1 - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)} . \quad (4)$$

Το πεδίο ορισμού της λύσης θα πρέπει απαραίτητα να περιέχει το σημείο $x = 1$ της αρχικής συνθήκης ενώ παράλληλα να ισχύει $x\left(1 - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) \neq 0$. Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης είναι το $(e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}})$.

2. Η δοθείσα είναι εξίσωση Bernoulli με $a = 3$. Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ και εκτελώντας το μετασχηματισμό Leibniz

$$u = y^{-2} , \quad (1)$$

έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}u^{-3/2}\frac{du}{dx} ,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{x^2}{2}u^{-3/2}u' + 2xu^{-1/2} - u^{-3/2} = 0 ,$$

ή

$$u' - \frac{4}{x}u = -\frac{2}{x^2} \quad . (2)$$

Η (2) είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$u = e^{\int \frac{4}{x}dx}\left\{C - 2\int x^{-2} e^{-\int \frac{4}{x}dx} dx\right\}$$

$$= x^4\left[C - 2\int x^{-6} dx\right]$$

$$= Cx^4 + \frac{2}{5x}, \quad (3)$$

οπότε η *γενική λύση* της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \pm\left(Cx^4 + \frac{2}{5x}\right)^{-1/2}, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y \equiv 0$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης η οποία όμως δεν μπορεί να προκύψει από την (4) με κάποια επιλογή της σταθεράς C και άρα είναι μια *ιδιάζουσα λύση*.

3. Η εξίσωση ανάγεται σε μια άλλη τύπου Bernoulli αφού αν εναλλάξουμε το ρόλο των μεταβλητών και θεωρήσουμε το x ως συνάρτηση του y, έχουμε

$$\frac{dx}{dy} - 2yx = y^3x^2, \quad (1)$$

έχοντας βεβαίως υποθέσει ότι $y' \neq 0$. Εισάγοντας τώρα το μετασχηματισμό Leibniz

$$u = x^{-1}, \quad (2)$$

έχουμε

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dy},$$

και άρα η (1) γίνεται

$$-u^{-2}\frac{du}{dy}-2yu^{-1}=y^3u^{-2}$$,

ή

$$\frac{du}{dx}+2yu=-y^3$$. (3)

Η *γενική λύση* της (3) είναι

$$u=u(y)=e^{-2\int ydy}\left\{C-\int y^3e^{2\int ydy}dy\right\}$$

$$=e^{-y^2}\left\{C-\int y^3e^{y^2}dy\right\}$$

$$=e^{-y^2}\left[C-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)e^{y^2}\right]$$

$$=Ce^{-y^2}-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)$$,

και συνεπώς η *γενική λύση* της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από τον τύπο

$$Ce^{-y^2}-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)=x^{-1}$$, (4)

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι όλες οι σταθερές συναρτήσεις $y\equiv C_1$ ($C_1\in R$) είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης, η καθεμία των οποίων όμως δεν μπορεί να προκύψει από την (4) με κάποια επιλογή της σταθεράς C και συνεπώς αυτές αποτελούν *ιδιάζουσες λύσεις*.

4. Η δοθείσα εξίσωση είναι τύπου Bernoulli με $a=3$. Υποθέτοντας ότι $y\neq 0$ και εκτελώντας το μετασχηματισμό Leibniz

$$u=y^{-2}$$, (1)

έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}u^{-3/2}\frac{du}{dx}$$,

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{x}{2}u^{-3/2}u'+u^{-1/2}-xu^{-3/2}=0,$$

ή

$$u'-\frac{2}{x}u=-2. \quad (2)$$

Η (2) είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$u=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left\{C-2\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right\}$$

$$=x^2\left[C-2\int\frac{1}{x^2}dx\right]$$

$$=Cx^2+2x. \quad (3)$$

Ικανοποιώντας την αρχική συνθήκη, θέτουμε στην (3) $x=1$, $u=y^{-2}=1$ και παίρνουμε $C=-1$. Έτσι, η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$y^{-2}=2x-x^2,$$

από την οποία, επιλύοντας ως προς y, έχουμε

$$y=\pm\left(2x-x^2\right)^{-1/2}. \quad (4)$$

Όμως η (4) δίνει δύο διαφορετικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης εκ των οποίων μόνο αυτή με το αρνητικό πρόσημο ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1)=-1$. Συνεπώς, η μορφή της συνάρτησης $y(x)$ δίνεται από την

$$y=y(x)=-\left(2x-x^2\right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Το πεδίο ορισμού της λύσης θα πρέπει απαραίτητα να περιέχει το σημείο $x=1$ της αρχικής συνθήκης ενώ παράλληλα να ισχύει $2x-x^2>0$. Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης είναι το $(0,2)$.